הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל - הפקולטה למתמטיקה

חדו"א 2מ – 104022

מבחן סוף סמסטר מועד ב', אביב - 20.09.19

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
לבחינה שני חלקים: בחלק א' שאלות רב־ברירה ("אמריקאיות") ובחלק ב' שאלות "פתוחות". עבור כל אחת מהשאלות בחלק א' יש להקיף בעיגול את התשובה היחידה הנכונה. על השאלות בחלק ב' יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

לכל אחת מן השאלות בחלק זה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה מבין האפשרויות הרשומות. יש להקיף בעיגול את התשובה הנכונה. סימון לא ברור, או סימון של יותר מתשובה אחת באותה שאלה, יפסול את תשובתך. משקל כל שאלה בחלק זה הוא 7 נקודות.

1. נתונים $\overline{a},\overline{b},\overline{c}\in\mathbb{R}^3$ ונגדיר $\overline{d}=(2\overline{a}+3\overline{b}+\overline{c})\times(5\overline{a}+3\overline{b}+2\overline{c})$.
מהו נפח המקבילון הנוצר ע"י $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ אם ידוע כי $\overline{d}\cdot\overline{a}=12$?

(א) 2
(ב) 4
(ג) 3
(ד) 1
(ה) 5

2. האינטגרל

$$\iint\limits_D xe^{y^2}dxdy$$

כאשר

$$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\}$$

שווה ל־

(א) $\frac{e^2-1}{3}$
(ב) $\frac{e-1}{4}$
(ג) $\frac{e^2-1}{4}$
(ד) $\frac{e-2}{2}$
(ה) $\frac{e-2}{3}$

3. יהי L עקום החיתוך בין המשטחים

$$x^2yz+xy^2z+xyz^2=3,\quad 3x^3-y^3+z^3=3.$$

כיוון המקביל לישר המשיק לעקום זה בנקודה $(1,1,1)$ הוא

(א) $(1,2,7)$
(ב) $(1,1,-1)$
(ג) $(1,2,-3)$
(ד) $(3,6,7)$
(ה) $(2,2,-4)$

4. מטייל עומד בנקודה $(2,1,0)$ על הר שצורתו $3x^2y^3+2x^3y^2\sin(z)+xyz^3=12$. הוא מחליט להתחיל לרדת בדרך הכי מהירה למטה. לאיזה כיוון במרחב עליו לפנות בתחילת תנועתו?

(א) $(3,6,-10)$
(ב) $(-\frac{1}{3},-\frac{2}{9},-8)$
(ג) $(1,1,-3)$
(ד) $(6,18,-45)$
(ה) $(2,6,-15)$

5. המסה של הגוף

$$V = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ \ z \ge 0,\ \ x^2+y^2 \ge 1\}$$

כאשר צפיפות המסה היא $\rho(x,y,z) = z$ היא

(א) 2π

(ב) $\frac{\pi}{4}$

(ג) π

(ד) $\frac{\pi}{5}$

(ה) $\frac{\pi}{3}$

6. אורך העקום

$$\overline{r}(t) = \left(\int_1^t \frac{\cos w}{w} dw, \int_1^t \frac{\sin w}{w} dw \right) \quad 2 \le t \le 4$$

הוא

(א) $\ln 2$

(ב) e

(ג) $\ln 4$

(ד) $e^4 - e^2$

(ה) $\ln \frac{5}{2}$

7. מסת המשטח

$$S = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ \ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$$

כאשר צפיפות המסה היא $\rho(x,y,z) = z$, היא

(א) π

(ב) $\frac{\pi}{2}$

(ג) 2π

(ד) 1

(ה) $\frac{1}{2}$

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לשתי השאלות הבאות.

8. (25 נקודות)
אין קשר בין הסעיפים.

(א) (5 נקודות)
תהי $f(x,y)$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ותהי (x_0,y_0) נקודה קריטית שבה

$$\det\begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix} > 0$$

הוכיחו כי $f''_{xx}(x_0,y_0), f''_{yy}(x_0,y_0)$ שונים מאפס, ויש להם את אותו הסימן.

(ב) (10 נקודות)
מיינו את הנקודות הקריטיות של $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$.

(ג) (10 נקודות)
הוכיחו כי לפונקציה $f(x,y) = xy$ יש מינימום ומקסימום (מוחלטים) בתחום $D = \{(x,y)|\ x^2+2y^2 \le 4\}$ ומיצאו את הערך המינימלי והמקסימלי ואת הנקודות בהן ערכים אלו מתקבלים.

9. (26 נקודות)
אין קשר בין הסעיפים.

(א) (16 נקודות)
נתון השדה
$$\overline{F}(x,y,z)=\left(3x^2y,x^3+2y-z^2,-6xyz\right)$$
והמשטח
$$S=\{(x,y,z)|\ z=25-9x^2-9y^2,\ 0\le z\le 9\}$$
עם אוריינטציה בה לנורמל רכיב z חיובי. חשבו את
$$\iint\limits_S \overline{F}\cdot\hat{n}dS$$
בסעיף זה, בתשובה הסופית, אפשר להשאיר בפתרון מספרים עם חזקות.

(ב) (10 נקודות)
נתון השדה
$$\overline{F}(x,y,z)=\left(yz-y,xz,xy+y-x-1\right)$$
ויהי $\Pi:\ Ax+By+Cz+D=0$ מישור עבורו $A+B+C=0$. לבסוף, יהי L עקום חלק ופשוט וסגור המוכל במישור Π.
הראו כי
$$\oint\limits_L \overline{F}\cdot d\overline{r}=0$$